Kurvendiskussion (Funktionsuntersuchung) einer gebrochenrationalen Funktion

(siehe auch Buch „LS-Analysis LK“, LK, Klett-Verlag, Buch Nr. 73224, S. 210)

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

1.) **Definitionsbereich**

Nullstellen des Nennerpolynoms h berechnen; dies sind Definitionslücken von f.

D(f) = R\{Definitionslücken}

2.) **Symmetrie**

(Es wird nur auf die Standardsymmetrien zur y-Achse bzw. zum Ursprung getestet.)
Berechne f(-x) und vergleiche mit f(x). Es gibt 3 Fälle:

(1) $f(-x) = f(x)$ → Achsensymmetrie
(2) $f(-x) = -f(x)$ → Punktsymmetrie
(3) $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ → keine (Standard-)Symmetrie

3.) **Polstellen/Asymptoten**

(Behebbarkeit, Vorzeichenwechsel, Asymptotengleichung)
Sind die Nullstellen des Nennerpolynoms h auch Nullstellen des Zählerpolynoms g?
Können Linearfaktoren des Nennerpolynoms komplett weggekürzt werden?

(1) ja: Definitionslücke ist behebbar, keine Polstelle

(2) nein: Definitionslücke ist nicht behebbar, also keine Polstelle;
Es gibt senkrechte Asymptote(n). Gleichung angeben.
mit/ohne Vorzeichenwechsel (VZW) hängt von Ordnung des Linearfaktors nach dem Kürzen ab
gerade Ordnung → kein VW
ungerade Ordnung → mit VZW

4.) **weitere („schiefe“) Asymptote; Verhalten für betragsgroße x**

a) Asymptote

Man vergleicht die Ordnung von Zählerpolynom g und Nennerpolynom h. Es gibt 3 Fälle:

(1) Grad(g) > Grad(h) → Mittels Polynomdivision wird die Gleichung der Asymptote bestimmt
(2) Grad(g) = Grad(h) → Asymptote = Parallele zur x-Achse; Gleichung ergibt sich als Quotient der beiden Leitkoeffizienten; y = a/b
(3) Grad(g) < Grad(h) → Asymptote = x-Achse; y=0

b) Verhalten für betragsgroße x

Das Verhalten für betragsgroße x (x_±∞) ergibt sich aus der Asymptote aus Teil a) und kann in den Fällen (2) und (3) direkt an der Gleichung der Asymptote abgelesen werden.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ müssen aus der Asymptote abgeleitet werden.

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a}{b}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

5.) **Achsenschnittpunkte**

a) Schnittpunkt mit der y-Achse (Punkt B)

f(0) berechnen, falls 0_D(f)

b) Nullstellen (Punkt(e) N)

Nullstellen von f sind Nullstellen des Zählerpolynoms g.
g(x) = 0 setzen und Gleichung lösen.

6.) **Ableitungen**

Mit Hilfe von Quotienten-, Produkt- und Kettenregel lassen sich f’, f“ und f’’’ berechnen.

7.) **Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte)**

a) notwendige Bedingung

$f''(x) = 0$; Die Lösungen dieser Gleichung sind Kandidaten x_e.

b) hinreichende Bedingung

$f''(x_e) \neq 0$ testen

- $f''(x_e) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt bei x_e (T)
- $f''(x_e) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt bei x_e (H)
- $f''(x_e) = 0 \rightarrow$ (zunächst) keine Aussage; höhere Ableitungen testen bis $f^{(n)}(x_e) \neq 0$.

c) y-Koordinate berechnen

$f(x_e) = y_e$ liefert die y-Koordinate vom Extrempunkt $E(x_e, y_e)$.

8.) **Wendestellen (Wendepunkte)**

a) notwendige Bedingung

$f''(x) = 0$; Die Lösung dieser Gleichung sind Kandidaten x_w.

b) hinreichende Bedingung

$f'''(x_w) \neq 0$ testen

- $f'''(x_w) \neq 0 \rightarrow$ Wendestelle bei x_w (W)
- $f'''(x_w) = 0 \rightarrow$ (zunächst) keine Aussage; höhere Ableitungen testen bis $f^{(n)}(x_w) \neq 0$.

c) y-Koordinate berechnen

$f(x_w) = y_w$ liefert die y-Koordinate vom Wendepunkt $W(x_w, y_w)$.

d) Test auf Sattelpunkt

$f'(x_w) = 0$ testen — falls $f'(x_w) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt $S(x_w, y_w)$
falls $f'(x_w) \neq 0 \rightarrow$ kein Sattelpunkt („nur“ Wendepunkt)

e) ggf. Wendetangente berechnen

t: y = m*x + b — Steigung $m = f'(x_w)$; wurde bei d) schon berechnet
Durch Einsetzen des Punktes W in t ergibt sich b.

9.) **Skizze/Zeichnung**

Für eine Skizze reichen meist die Ergebnisse der Kurvendiskussion; ggf. einzelne Hilfspunkte berechnen.
Für eine Zeichnung wird eine Wertetabelle benötigt.
Ausschnitt und Skalierung ergeben sich aus den Ergebnissen der Kurvendiskussion.

Endkontrolle

Alle Ergebnisse der Kurvendiskussion und die Zeichnung müssen zueinander passen.