

# Kurvendiskussion (Funktionsuntersuchung) einer gebrochen rationalen Funktion

(siehe auch Buch „LS-Analyse LK“, Klett-Verlag, Buch Nr. 73224, S. 210)

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

## 1.) Definitionsbereich

Nullstellen des Nennerpolynoms  $h$  berechnen; dies sind Definitionslücken von  $f$ .

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\text{Definitionslücken}\}$$

## 2.) Symmetrie

(Es wird nur auf die Standardsymmetrien zur  $y$ -Achse bzw. zum Ursprung getestet.)

Berechne  $f(-x)$  und vergleiche mit  $f(x)$ . Es gibt 3 Fälle:

- (1)  $f(-x) = f(x)$   $\rightarrow$  Achsensymmetrie
- (2)  $f(-x) = -f(x)$   $\rightarrow$  Punktsymmetrie
- (3)  $f(-x) \neq f(x)$  und  $f(-x) \neq -f(x)$   $\rightarrow$  keine (Standard-)Symmetrie

## 3.) Polstellen/Asymptoten

(Behibarkeit, Vorzeichenwechsel, Asymptotengleichung)

Sind die Nullstellen des Nennerpolynoms  $h$  auch Nullstellen des Zählerpolynoms  $g$ ?

Können Linearfaktoren des Nennerpolynoms komplett weggekürzt werden?

- (1) ja: Definitionslücke ist behibar, keine Polstelle
- (2) nein: Definitionslücke ist nicht behibar, also keine Polstelle;  
Es gibt senkrechte Asymptote(n). Gleichung angeben.  
mit/ohne Vorzeichenwechsel (VZW) hängt von Ordnung des Linearfaktors nach dem Kürzen ab
  - gerade Ordnung  $\rightarrow$  kein VW
  - ungerade Ordnung  $\rightarrow$  mit VZW

## 4.) weitere („schiefe“) Asymptote; Verhalten für betragsgroße $x$

### a) Asymptote

Man vergleicht die Ordnung von Zählerpolynom  $g$  und Nennerpolynom  $h$ . Es gibt 3 Fälle:

- (1)  $\text{Grad}(g) > \text{Grad}(h)$   $\rightarrow$  Mittels Polynomdivision wird die Gleichung der Asymptote bestimmt
- (2)  $\text{Grad}(g) = \text{Grad}(h)$   $\rightarrow$  Asymptote = Parallele zur  $x$ -Achse; Gleichung ergibt sich als Quotient der beiden Leitkoeffizienten;  $y =$

$a/b$

- (3)  $\text{Grad}(g) < \text{Grad}(h)$   $\rightarrow$  Asymptote =  $x$ -Achse;  $y=0$

### b) Verhalten für betragsgroße $x$

Das Verhalten für betragsgroße  $x$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) ergibt sich aus der Asymptote aus Teil a) und kann in den Fällen (2) und (3) direkt an der Gleichung der Asymptote abgelesen werden.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  müssen aus der Asymptote abgeleitet werden.

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{b}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

## 5.) Achsenschnittpunkte

a) Schnittpunkt mit der y-Achse (Punkt B)

$f(0)$  berechnen, falls  $0 \in D(f)$

b) Nullstellen (Punkt(e) N)

Nullstellen von  $f$  sind Nullstellen des Zählerpolynoms  $g$ .

$g(x) = 0$  setzen und Gleichung lösen.

## 6.) Ableitungen

Mit Hilfe von Quotienten-, Produkt- und Kettenregel lassen sich  $f'$ ,  $f''$  und  $f'''$  berechnen.

## 7.) Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte)

a) notwendige Bedingung

$f'(x_e) = 0$ ; Die Lösungen dieser Gleichung sind Kandidaten  $x_e$ .

b) hinreichende Bedingung

$f''(x_e) \neq 0$  testen

$f''(x_e) > 0 \rightarrow$  Tiefpunkt bei  $x_e$  (T)

$f''(x_e) < 0 \rightarrow$  Hochpunkt bei  $x_e$  (H)

$f''(x_e) = 0 \rightarrow$  (zunächst) keine Aussage; höhere Ableitungen testen bis  $f^{(n)}(x_e) \neq 0$ .

c) y-Koordinate berechnen

$f(x_e) = y_e$  liefert die y-Koordinate vom Extrempunkt  $E(x_e, y_e)$ .

## 8.) Wendestellen (Wendepunkte)

a) notwendige Bedingung

$f''(x) = 0$ ; Die Lösung dieser Gleichung sind Kandidaten  $x_w$ .

b) hinreichende Bedingung

$f'''(x_w) \neq 0$  testen

$f'''(x_w) \neq 0 \rightarrow$  Wendestelle bei  $x_w$  (W)

$f'''(x_w) = 0 \rightarrow$  (zunächst) keine Aussage; höhere Ableitungen testen bis  $f^{(n)}(x_w) \neq 0$ .

c) y-Koordinate berechnen

$f(x_w) = y_w$  liefert die y-Koordinate vom Wendepunkt  $W(x_w, y_w)$ .

d) Test auf Sattelpunkt

$f'(x_w) = 0$  testen

falls  $f'(x_w) = 0 \rightarrow$  Sattelpunkt  $S(x_w, y_w)$

falls  $f'(x_w) \neq 0 \rightarrow$  kein Sattelpunkt („nur“ Wendepunkt)

e) ggf. Wendetangente berechnen

t:  $y = m \cdot x + b$

Steigung  $m = f'(x_w)$ ; wurde bei d) schon berechnet  
Durch Einsetzen des Punktes W in t ergibt sich b.

### 9.) **Skizze/Zeichnung**

Für eine Skizze reichen meist die Ergebnisse der Kurvendiskussion; ggf. einzelne Hilfspunkte berechnen.

Für eine Zeichnung wird eine Wertetabelle benötigt.

Ausschnitt und Skalierung ergeben sich aus den Ergebnissen der Kurvendiskussion.

Auf jeden Fall ist eine sinnvolle Skalierung (Maßeinheit für x- und y-Achse) zu wählen!

### **Endkontrolle**

Alle Ergebnisse der Kurvendiskussion und die Zeichnung müssen zueinander passen.