Grundbegriffe der Graphentheorie

Graph: Ein Graph besteht aus einer Menge von Punkten („Knoten“) und einer Menge von Linien („Kanten“), die diese Punkte verbinden. Man unterscheidet zwischen ungerichteten und gerichteten Graphen oder *Digraphen* (engl. *di*rected *graph*). Mathematisch heißt $G = (V, E)$ ein *ungerichteter Graph,* wenn gilt:

(i) V ist eine endliche nichtleere Menge, die Menge der *Knoten;*

(ii) E ist eine Menge von ein- oder zweielementigen Teilmengen von V.

Ein Paar $\{u, v\} \in E$ heißt *Kante,* u und v sind dann *adjazent.* Ein Element $\{a\} \in E$ heißt *Schlinge.* Die anschauliche Darstellung des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ zeigt Abb. 1.

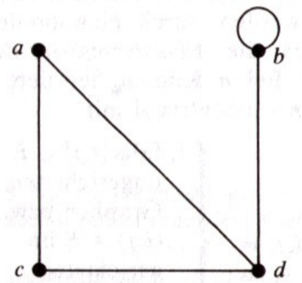

Abb. 1: Darstellung eines ungerichteten Graphen

Bei *gerichteten Graphen* verlangt man, daß die Elemente von E geordnet sind, also E eine Teilmenge von $V \times V$ ist. Die gerichtete Kante von u nach v notiert man durch (u, v). Der gerichtete Digraph $G' = (V', E')$ mit $V' = \{a, b, c, d\}$ und $E' = \{(a, c), (d, a), (b, d), (b, b), (d, c)\}$ ist in Abb. 2 anschaulich dargestellt.

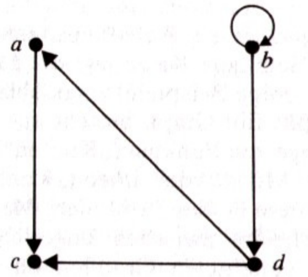

Abb. 2: Darstellung eines gerichteten Graphen

Graphen wurden 1736 erstmals von L. Euler (1707–1783) bei der Lösung des ↑Königsberger Brückenproblems benutzt. In der Informatik spielen Graphen eine große Rolle bei der Beschreibung von allgemeinen ↑Datenstrukturen, ↑Petri-Netzen und ↑Rechnernetzen.

Eine Implementierung von Graphen sieht vor, daß die Knoten beginnend bei 1 irgendwie fortlaufend numeriert werden. Die Kantenbeziehungen werden durch eine boolesche Matrix, die *Adjazenzmatrix,* dargestellt. Bei n Knoten definiert man eine $n \times n$-Matrix A mit

$$A(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i,j\} \in E \text{ im ungerichteten Graphen bzw. } (i,j) \in E \text{ im gerichteten Graphen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Adjazenzmatrix A zu G (Abb. 1) und A' zu G' (Abb. 2) lautet beispielsweise:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen immer symmetrisch (d.h. $A(i,j) = A(j,i)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

Quelle: Schüler-Duden „Die Informatik“